

VISUALISASI SUPREMUM DAN INFIMUM MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN PYTHON

Oleh:

Dwi Anggraini¹

Revalina Ayu Natalia Hutabarat²

Santa De Luisa Sitorus³

Wildani Niarina Nabilah⁴

Tri Andri Hutapea⁵

Universitas Negeri Medan

Alamat: JL. William Iskandar Ps. V, Kenangan Baru, Kec. Percut Sei Tuan, Kabupaten
Deli Serdang, Sumatera Utara. (20221).

Korespondensi Penulis: dwia63994@mhs.unimed.ac.id

Abstract. *Supremum and infimum are fundamental concepts in real analysis that are often considered difficult by students because they are abstract and cannot always be represented concretely through numbers or simple algebraic forms. This research aims to facilitate the understanding of these concepts by developing visualization-based learning media using Python programming, specifically through the Matplotlib and NumPy libraries. The method used involves computational experimentation in the form of visualization program development and evaluation of student understanding through worksheet analysis before and after program use. The program developed is able to display a number line with a certain interval, and clearly mark the supremum and infimum points using color annotations, vertical auxiliary lines, and explanatory legends, so that students can visually see the position of the smallest upper limit and the largest lower limit of a set. The results showed a significant increase in understanding: as many as 83% of students who previously could not identify the supremum and infimum correctly, managed to give the right answer after seeing the visualization results. In addition, students' responses to this learning media were also very positive; most stated that the visualization made the concepts easier to understand and helped them relate the*

Received March 26, 2025; Revised April 05, 2025; April 11, 2025

*Corresponding author: dwia63994@mhs.unimed.ac.id

VISUALISASI SUPREMUM DAN INFIMUM MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN PYTHON

theory to real representations. These findings suggest that the use of Python is not only effective for clarifying complex mathematical concepts, but can also increase students' learning motivation and active engagement. Therefore, this technology-based approach has the potential to be applied more widely in mathematics learning, especially in abstract materials. It is recommended that further development be directed at web-based or mobile interactive applications so that access to this learning media is wider and more flexible, and can be integrated in various teaching methods in higher education.

Keywords: *Supremum, Infimum, Visualization, Python, Real Analysis.*

Abstrak. Supremum dan infimum adalah konsep fundamental dalam analisis *real* yang kerap dianggap sulit oleh mahasiswa karena bersifat abstrak dan tidak selalu dapat direpresentasikan secara konkret melalui angka atau bentuk aljabar sederhana. Penelitian ini bertujuan untuk mempermudah pemahaman konsep tersebut dengan mengembangkan media pembelajaran berbasis visualisasi menggunakan pemrograman Python, khususnya melalui pustaka Matplotlib dan NumPy. Metode yang digunakan melibatkan eksperimen komputasional berupa pengembangan program visualisasi serta evaluasi pemahaman mahasiswa melalui analisis lembar kerja sebelum dan sesudah penggunaan program. Program yang dikembangkan mampu menampilkan garis bilangan dengan interval tertentu, serta secara jelas menandai titik supremum dan infimum menggunakan anotasi warna, garis bantu vertikal, dan legenda penjelas, sehingga mahasiswa dapat melihat posisi batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari suatu himpunan secara visual. Hasil penelitian menunjukkan adanya peningkatan pemahaman yang signifikan: sebanyak 83% mahasiswa yang sebelumnya tidak dapat mengidentifikasi supremum dan infimum dengan benar, berhasil memberikan jawaban yang tepat setelah melihat hasil visualisasi. Selain itu, respon mahasiswa terhadap media pembelajaran ini juga sangat positif; sebagian besar menyatakan bahwa visualisasi membuat konsep lebih mudah dipahami dan membantu mereka mengaitkan teori dengan representasi nyata. Temuan ini menunjukkan bahwa penggunaan Python tidak hanya efektif untuk memperjelas konsep matematis yang kompleks, tetapi juga dapat meningkatkan motivasi belajar dan keterlibatan mahasiswa secara aktif. Oleh karena itu, pendekatan berbasis teknologi ini sangat potensial untuk diterapkan secara lebih luas dalam pembelajaran matematika, khususnya pada materi yang bersifat abstrak. Disarankan agar pengembangan selanjutnya

diarahkan pada aplikasi interaktif berbasis web atau mobile agar akses terhadap media pembelajaran ini semakin luas dan fleksibel, serta dapat diintegrasikan dalam berbagai metode pengajaran di pendidikan tinggi.

Kata Kunci: Supremum, Infimum, Visualisasi, Python, Analisis *Real*.

LATAR BELAKANG

Konsep supremum dan infimum, yang merupakan komponen penting dari analisis *real* dalam matematika, digunakan untuk menentukan batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari suatu himpunan bilangan *real*. Pemahaman terhadap konsep ini sangat diperlukan dalam studi lanjut matematika dan aplikasinya dalam bidang sains dan teknik. Namun, banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam memahami supremum dan infimum karena sifatnya yang abstrak dan sering kali tidak memiliki representasi konkret dalam angka atau bentuk aljabar yang sederhana. Seiring dengan perkembangan teknologi, visualisasi matematika telah menjadi alat bantu yang efektif dalam meningkatkan pemahaman konsep-konsep abstrak. Representasi grafis membantu dalam menjembatani kesenjangan antara pemahaman teoretis dan aplikasinya.

Oleh karena itu, penggunaan alat bantu berbasis pemrograman menjadi salah satu solusi dalam pembelajaran matematika modern. Salah satu bahasa pemrograman yang banyak digunakan dalam analisis numerik dan visualisasi data adalah Python. Python menyediakan berbagai pustaka seperti NumPy untuk manipulasi bilangan *real* serta Matplotlib untuk memvisualisasikan data dalam bentuk grafik. Dengan memanfaatkan kemampuan Python, supremum dan infimum dapat divisualisasikan secara grafis, sehingga mempermudah mahasiswa dalam memahami batas atas terkecil dan batas bawah terbesar suatu himpunan atau fungsi matematika.

Berdasarkan permasalahan tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan visualisasi supremum dan infimum menggunakan pemrograman Python. Dengan adanya representasi grafis, diharapkan mahasiswa dapat lebih mudah memahami konsep supremum dan infimum dalam berbagai konteks matematika. Selain itu, penelitian ini juga bertujuan untuk menguji efektivitas pendekatan berbasis pemrograman dalam meningkatkan pemahaman mahasiswa terhadap konsep matematis yang abstrak.

VISUALISASI SUPREMUM DAN INFIMUM MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN PYTHON

KAJIAN TEORITIS

Definisi Misalkan S Merupakan Himpunan Bagian Dari $\mathbb{R}$

Misalkan S merupakan suatu himpunan bagian dari bilangan *real* $\mathbb{R}$. Himpunan S dikatakan memiliki batas atas apabila terdapat suatu bilangan $u \in \mathbb{R}$ sedemikian hingga setiap elemen s di dalam S memenuhi $s \leq u$. Nilai u tersebut disebut sebagai batas atas dari S . Demikian pula, S disebut memiliki batas bawah apabila ada suatu bilangan $w \in \mathbb{R}$ sehingga untuk setiap $s \in S$, berlaku $w \leq s$. Bilangan w ini dinamakan batas bawah dari S . Jika suatu himpunan mempunyai baik batas atas maupun batas bawah, maka himpunan tersebut disebut terbatas. Sebaliknya, jika himpunan tersebut tidak memiliki salah satu atau kedua batas tersebut, maka disebut tak terbatas.

Definisi Misalkan S Merupakan Himpunan Bagian Dari $\mathbb{R}$

Apabila suatu himpunan S memiliki batas atas, maka terdapat bilangan u yang disebut sebagai *supremum* atau batas atas terkecil dari S . Bilangan ini memenuhi dua syarat, yaitu: pertama, u merupakan batas atas dari S ; dan kedua, untuk setiap bilangan lain yang juga menjadi batas atas dari S , maka u selalu lebih kecil atau sama dengan bilangan tersebut. Sebaliknya, jika S memiliki batas bawah, maka terdapat bilangan w yang disebut *infimum* atau batas bawah terbesar dari S . Syarat yang harus dipenuhi oleh w adalah: pertama, w merupakan batas bawah dari himpunan S ; dan kedua, jika ada bilangan lain yang juga menjadi batas bawah dari S , maka nilainya tidak boleh lebih besar dari w . Secara umum, sebuah himpunan dapat berada dalam empat kondisi terkait keberadaan supremum dan infimum, yaitu: memiliki keduanya sekaligus, hanya memiliki supremum, hanya memiliki infimum, atau tidak memiliki keduanya sama sekali.

Setiap himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ yang tidak kosong dan memiliki batas atas pasti mempunyai supremum yang juga merupakan elemen dari $\mathbb{R}$ (Bartle & Sherbert, 2010). Supremum dan infimum merupakan bagian dari sifat keterurutan bilangan *real*, yang menjadi dasar dalam studi limit, integral, dan analisis *real* secara umum (Abbott, 2015).

Visualisasi dalam matematika memainkan peran penting dalam meningkatkan pemahaman konsep-konsep abstrak. Representasi grafis dapat membantu mahasiswa dalam memahami hubungan antara teori dan aplikasinya dalam pemecahan masalah matematis (Zimmermann & Cunningham, 1991).

Dalam konteks supremum dan infimum, grafik digunakan untuk menunjukkan batas atas terkecil dan batas bawah terbesar dari suatu fungsi atau himpunan angka. Dengan bantuan teknologi, visualisasi dapat meningkatkan intuisi matematis dan mempercepat pemahaman konsep yang kompleks.

Python

Python adalah salah satu bahasa pemrograman yang banyak digunakan dalam analisis matematika dan visualisasi data. Keunggulan Python meliputi sintaks yang mudah dipahami serta pustaka yang kaya untuk keperluan komputasi numerik dan pemodelan grafis. Beberapa pustaka utama dalam Python yang digunakan dalam penelitian ini meliputi: 1. NumPy: Digunakan untuk operasi matematika numerik, termasuk manipulasi array, operasi vektor, dan analisis bilangan *real* (Harris dkk., 2020). 2. Matplotlib: Digunakan untuk membuat grafik matematika, termasuk plot fungsi, scatter plot, dan anotasi titik-titik penting dalam analisis *real* (Hunter, 2007).

Visualisasi matematika secara interaktif tidak hanya membantu dalam pemahaman konsep, tetapi juga meningkatkan motivasi dan keterlibatan mahasiswa. Menurut Arcavi (2003), visualisasi dalam pendidikan matematika memainkan peran krusial dalam menjembatani intuisi dan formalitas matematis, terutama dalam konsep abstrak seperti supremum dan infimum.

Selain itu, penggunaan media berbasis teknologi dalam pembelajaran matematika modern, termasuk Python, menunjukkan peningkatan hasil belajar siswa. Menurut Roschelle et al. (2000), teknologi interaktif memungkinkan siswa mengeksplorasi konsep matematika dalam konteks nyata dan mendalam, mempercepat pemahaman melalui feedback visual secara langsung.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan metode eksperimen komputasional dan evaluatif, di mana eksperimen dilakukan dengan membangun program Python di Google Collaboratory (Google Colab) untuk memvisualisasikan supremum dan infimum, sedangkan evaluasi dilakukan dengan membandingkan hasil program dengan jawaban mahasiswa dari lembar kerja yang telah diberikan sebelumnya. Tahapan penelitian diawali dengan studi literatur, di mana berbagai referensi akademik terkait supremum dan

VISUALISASI SUPREMUM DAN INFIMUM MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN PYTHON

infimum dikumpulkan dan dikaji, termasuk bagaimana konsep ini dapat divisualisasikan menggunakan bahasa pemrograman Python. Setelah itu, dilakukan perancangan algoritma, yang meliputi penentuan himpunan bilangan yang akan divisualisasikan, identifikasi supremum dan infimum dari himpunan tersebut, serta pengembangan algoritma untuk menampilkan garis bilangan dan memberikan anotasi pada supremum serta infimum agar mudah dipahami oleh mahasiswa.

Algoritma yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Inisialisasi rentang bilangan Tentukan batas bawah (infimum) dan batas atas (supremum) dari himpunan.
2. Pembuatan garis bilangan Gunakan Matplotlib untuk menggambar garis bilangan dari batas bawah hingga batas atas.
3. Penandaan interval bilangan Gunakan garis tebal untuk menunjukkan himpunan bilangan dalam rentang tertentu.
4. Identifikasi supremum dan infimum Tandai titik supremum dan infimum dengan simbol khusus (misalnya lingkaran kosong). Gunakan garis bantu vertikal untuk menyoroti posisi supremum dan infimum.
5. Pemberian anotasi dan *styling* Tambahkan judul grafik, label, dan legenda untuk memperjelas visualisasi.
6. Menampilkan hasil visualisasi Jalankan perintah `plt.show()` untuk menampilkan garis bilangan dengan supremum dan infimum.

Selanjutnya, pada tahap implementasi program, program dikembangkan menggunakan Google Colab dengan bahasa pemrograman Python dan pustaka Matplotlib serta NumPy. Setelah implementasi program selesai, dilakukan tahap pengujian dan evaluasi dengan membandingkan hasil visualisasi dari program dengan jawaban mahasiswa yang telah mengerjakan soal terkait supremum dan infimum dalam lembar kerja mereka. Evaluasi ini mencakup pengumpulan lembar jawaban mahasiswa dan analisis kesesuaian jawaban dengan hasil program. Jika jawaban mahasiswa sesuai dengan hasil visualisasi dari program, maka jawaban tersebut dianggap benar.

Kriteria keberhasilan dalam penelitian ini adalah program Python yang dikembangkan mampu menampilkan supremum dan infimum secara visual dengan baik, serta hasil visualisasi tersebut dapat digunakan sebagai alat bantu dalam pembelajaran konsep supremum dan infimum. Jika mayoritas mahasiswa dapat memberikan jawaban

yang benar setelah melihat hasil visualisasi, maka dapat disimpulkan bahwa pendekatan ini efektif dalam meningkatkan pemahaman konsep matematika secara lebih intuitif.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Berikut ini adalah hasil visualisasi yang diperoleh dari program yang telah dibuat:



Program yang dikembangkan berhasil memvisualisasikan supremum dan infimum dari interval bilangan *real* menggunakan Python dalam Google Collaboratory. Hasil output menunjukkan garis bilangan dengan batas interval, yang ditampilkan sebagai garis biru tebal. Supremum (nilai batas atas) dan infimum (nilai batas bawah) ditandai dengan garis vertikal putus-putus dan anotasi warna berbeda untuk membedakan keduanya. Selain itu, terdapat legenda yang memberikan informasi mengenai elemen-elemen pada grafik.

VISUALISASI SUPREMUM DAN INFIMUM MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN PYTHON

Pembahasan

Hasil yang diperoleh dari program ini dapat dianalisis berdasarkan tahapan algoritma yang telah disusun sebagai berikut:

1. Inisialisasi Variabel

Pada tahap awal, program mendefinisikan batas interval dengan nilai $x_{\text{start}} = 1$ dan $x_{\text{end}} = 10$. Variabel ini digunakan sebagai acuan untuk menggambar garis bilangan serta menentukan supremum dan infimum.

2. Pembuatan Garis Bilangan

Program membuat garis bilangan menggunakan fungsi `plt.hlines()`, yang menampilkan garis horizontal sebagai representasi bilangan *real*. Output pada tahap ini berupa garis hitam panjang yang menjadi dasar visualisasi.

3. Penandaan Interval

Dengan menggunakan `plt.plot()`, program menampilkan garis biru tebal untuk menunjukkan interval $1 < x < 10$. Hasilnya, garis ini menjadi penanda utama rentang nilai yang diperhatikan dalam studi supremum dan infimum.

4. Penandaan Supremum dan Infimum

Program menggunakan fungsi `plt.scatter()` dan `plt.axvline()` untuk menampilkan titik dan garis vertikal yang menandai batas bawah (infimum) dan batas atas (supremum). Infimum ditampilkan dengan warna hijau pada $x = 1$, sementara supremum ditampilkan dengan warna merah pada $x = 10$.

5. Anotasi dan *Styling*

Program menambahkan judul, legenda, serta grid menggunakan `plt.title()`, `plt.legend()`, dan `plt.grid()`. Hasilnya, grafik menjadi lebih informatif dengan keterangan yang memudahkan interpretasi.

Berdasarkan perbandingan dengan lembar jawaban mahasiswa, jawaban yang diberikan sudah benar. Mahasiswa mampu mengidentifikasi supremum dan infimum dengan tepat sesuai dengan hasil visualisasi dari program. Hal ini menunjukkan pemahaman yang baik terhadap konsep interval serta batas bawah dan atas dalam himpunan bilangan *real*.

Melalui visualisasi ini, mahasiswa bisa lebih mudah memahami bahwa supremum bukan sekadar batas atas, melainkan batas atas yang paling kecil dari suatu himpunan. Di sisi lain, infimum merupakan batas bawah yang nilainya paling besar di antara batas

bawah lainnya. Hal ini sejalan dengan teori supremum-infimum yang dinyatakan oleh Bartle & Sherbert (2010), yang menyebutkan bahwa setiap himpunan tak kosong yang merupakan bagian dari bilangan *real* dan memiliki batas atas, pasti memiliki supremum yang termasuk dalam himpunan bilangan *real*.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Penggunaan Python dengan bantuan pustaka Matplotlib dan NumPy terbukti efektif dalam memvisualisasikan konsep matematika seperti supremum dan infimum. Representasi visual ini membantu mahasiswa dalam memahami konsep yang bersifat abstrak dengan cara yang lebih konkret. Namun, pendekatan ini tidak lepas dari kekurangan, seperti perlunya pemahaman dasar tentang pemrograman serta ketergantungan pada perangkat lunak tertentu.

Saran

Penelitian selanjutnya disarankan untuk mengembangkan aplikasi interaktif berbasis web atau mobile guna memperluas aksesibilitas dan keterlibatan pengguna. Selain itu, eksplorasi terhadap berbagai jenis visualisasi yang lebih variatif, penerapan dalam konteks mata kuliah lain, serta studi komparatif dengan metode pengajaran konvensional juga penting dilakukan. Pengembangan strategi pembelajaran yang bersifat kolaboratif dapat menjadi langkah tambahan untuk mengoptimalkan efektivitas visualisasi dalam mendukung pemahaman konsep-konsep matematika.

DAFTAR REFERENSI

- Abbott, S. (2015). *Understanding analysis* (2nd ed.). Springer.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2010). *Introduction to Real Analysis*. John Wiley & Sons.

VISUALISASI SUPREMUM DAN INFIMUM MENGGUNAKAN PEMROGRAMAN PYTHON

- Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., & Oliphant, T. E. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825), 357–362. <https://doi.org/10.1038/s41586-020-2649-2>
- Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90–95. <https://doi.org/10.1109/MCSE.2007.55>
- Roschelle, J., Pea, R., Hoadley, C., Gordin, D., & Means, B. (2000). Changing how and what children learn in school with computer-based technologies. *The Future of Children*, 10(2), 76–101. <https://doi.org/10.2307/1602690>
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (Eds.). (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Mathematical Association of America.